凱利公式（Kelly formula）：長期投資的贏家方程式

- **凱利公式適用於正期望值的賭局，如何重複下注使得長期獲利率最大化的公式。**
- **凱利公式需要知道賭局的獲勝機率、獲利金額和損失金額。**
- **股市投資的凱利公式需要知道未來長期投資的年化報酬率和年化標準差，這只有上帝做得到。**
- **股市過去長期歷史估計的年化報酬率和年化標準差或可做為運用凱利公式所需要的參數。**

作者: 張森林

日期: 2024 年 10 月 30 日

凱利公式（Kelly formula）是一個用於**正期望值的賭局**，如何重複下注的賭局行為，使得長期獲利率最大化的公式，這個公式是由約翰·拉里·凱利於 1956 年在《貝爾系統技術期刊》中提出，可用以計算出每次賭局中應投注的資金比例。

值得注意的是，**凱利公式只適用於期望值為正的賭局**，然而一般賭場的賭局，期望值卻是負值，所謂久賭必輸，因此不適用凱利公式。但在金融市場，許多資產的長期報酬率都是正值，因此可以運用凱利公式來決定最適的投資比例，使得資產長期投資的價值增長率極大化。

凱利公式如下: **下注比例=W – (1 – W)/(B/A)**, 其中 W 是獲勝的機率，B 是獲勝時的獲利金額，A 是損失時的損失金額。舉例來說，若某個賭局，獲勝的機率為 50%，獲勝時能得到賭金的 1.1 倍，輸時則損失賭金，則 W=50%，B=1.1，A=1，則每次賭注金額應該是所有賭金的 K = 0.5 – (1-0.5)/(1.1/1) = 4.5%。只要連續參加賭局，且機率不變，按照此下注比例長期投注可以獲得最大的報酬率。

上述的公式如果要運用在股市投資的話，模型需要加以修正。以下假設股票年化報酬率為μ、年化標準差為σ的資產，每次賭局時間歷經Δt，則在 Jarrow and Rudd (1982)二項樹模型，上漲、下跌機率皆為 0.5，上漲幅度為$\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}$ (獲利金額為$\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}$)，下跌幅度為$\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}$ (損失金額為$-\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}$)，代入凱利公式，可以推導得出該股票的投資比例為:

$$\text{Kelly }\% = 0.5-\frac{0.5}{(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})/(-\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})}=\frac{\mu\Delta t}{\sigma^2\Delta t-\mu^2\Delta t^2}\approx\frac{\mu}{\sigma^2}$$

考慮資金成本(機會成本)為無風險利率r_f，則上述公式修正為:

$$\text{Kelly }\% \approx \frac{\mu-r_f}{\sigma^2}。$$

舉例而言，採用 S&P 500 指數從 1960 年 1 月 4 日到 2024 年 10 月 22 日的收盤指數日資料，計算得到的年化報酬率為 8.41%、標準差為 16.41%。筆者所取得的 S&P 500 指數資料為加權股價指數，並非總報酬指數，因此上述的年化報酬率不包含股利率。如果假設股利率等於無風險利率，則根據凱利公式計算得到的最適投資比例為 3.12 倍。如果無風險利率等於股利率加 1%，則計算得到的最適投資比例為 2.75 倍，如果無風險利率等於股利率加 2%，則計算得到的最適投資比例為 2.38 倍，如果無風險利率等於股利率加 3%，則計算得到的最適投資比例為 2 倍。

上述的數字顯示，長期投資 S&P 500 指數 ETF 應該開 2 倍到 3 倍的槓桿，能夠讓獲利極大化。筆者按照槓桿型 ETF 的操作方式，追蹤 S&P 500 指數每日報酬率的 2 倍和 3 倍，計算從 1960 年 1 月 4 日到 2024 年 10 月 22 日期間，2 倍和 3 倍槓桿 S&P 500 指數 ETF 的累積總報酬和年化報酬率，2 倍槓桿 S&P 500 指數 ETF 的累積總報酬為 501.9 倍，年化報酬率為 10.09%，3 倍槓桿 S&P 500 指數 ETF 的累積總報酬為 9545.1 倍，年化報酬率為 12.13%。上述的結果顯示，凱利公式預測的 3 倍槓桿最適投資比例確實可以相當程度的極大化投資報酬率。

那麼**掌握凱利公式是否就如同擁有一棵搖錢樹?**答案當然不是，首先**凱利公式只適用於投資期限無限的賭局**，上述的例子中投資期間長達 64 年，勉強符合凱利公式無限賭局的假設。其次，**金融市場中的參數並非固定不變，年化報酬率和標準差在不同的期間有很大的差異**，而參數的變動對於凱利公式的最適投資比例有很大的影響。第三，也是最重要的原因就是: **投資人要如同上帝一樣，知道所投資的資產未來長期的年化報酬率和標準差，才能計算得到最適投資比例以極大化長期報酬率**。最後，**投資人的心理素質要能夠經得起資產價值的波動**，因為如果最適投資比例是高達 2 倍或 3 倍的槓桿，其價格的波動也是一般市場價格變動幅度的 2 倍或 3 倍。前面單元我們曾經提到過 3 倍槓桿型的 Nasdaq 100 指數 ETF，投資人在短短 15 年不到的時間(1985 年 10 月 1 日到 2000 年 3 月 27 日)獲利上漲 5874 倍之多，但緊接著 1 年 7 個月左右的時間，獲利回吐只剩 3.4 倍，這樣的情境有多少投資人可以忍受和承擔呢?

讓我們再回到上述的第 3 點，如果你是上帝或有一臺時光機，你在 1985 年 10 月 1 日時，應該投資 5 倍槓桿型的 Nasdaq 100 指數 ETF，因為**從 1985 年 10 月 1 日到 2000 年 3 月 27 日**，Nasdaq 100 指數年化報酬率 28.37%，年化標準差 23.92%，依照**凱利公式計算得到的最適投資比例為 5 倍**。這段期間，5 倍槓桿型的 Nasdaq 100 指數 ETF 總共上漲了 19864 倍，比 3 倍槓桿型的 Nasdaq 100 指數 ETF 的漲幅(上漲 5874 倍)高出許多。

我們不是上帝，所以沒有完美的凱利公式可以使用。但如果你相信歷史會重複發生，股市過去長期歷史估計的年化報酬率和年化標準差或

可做為運用凱利公式所需要的參數，未來就是堅守你的投資理念並且克服你的人性弱點，那麼你有機會可以真正成為長期投資的贏家。